

4 Лекция №4 "Закон сохранения механической энергии"

Работа. Кинетическая и потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии.

Энергия – это скалярная физическая величина, которая служит универсальной мерой различных форм движения материи. Каждому виду движения в физике соответствует своя форма энергии, например механическому движению макроскопических тел – **механическая энергия**, тепловому движению частиц, образующих макроскопические тела, – **внутренняя энергия**.

Цель лекции – выяснить как количественно определяется механическая энергия, почему ее количество может изменяться, сохраняться, а также превращаться в другие формы.

4.1 Работа

Согласно представлениям современной механики взаимодействие между телом и окружающей средой сопровождается обменом энергией. Этот обмен количественно характеризуется **механической работой**.

Работой постоянной силы \mathbf{F} при малом перемещении тела, обозначенным вектором $d\mathbf{r}$, называется скалярная физическая величина

$$(54) \quad dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{F}||d\mathbf{r}| \cos \alpha = F_l dl,$$

где $dl = |d\mathbf{r}|$ – малый путь, пройденный телом, α – угол между векторами \mathbf{F} и $d\mathbf{r}$, а $F_l = |\mathbf{F}| \cos \alpha$ – проекция вектора силы на вектор перемещения, см. Рис. 10.

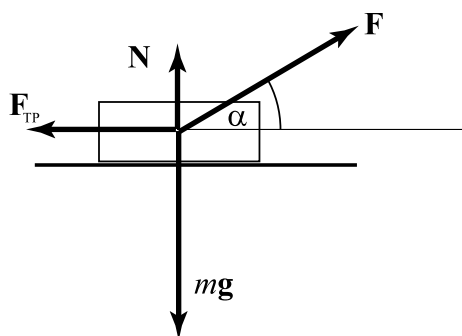


Рис. 10: Движение тела под действием постоянной силы.

Если тело движется прямолинейно и на него действует постоянная сила \mathbf{F} , которая составляет угол α с направлением перемещения, то работа равна

$$(55) \quad A = Fl \cos \alpha,$$

где l – путь, пройденный телом по прямой.

Вычислим работу по подъему тела массой m на высоту h с постоянной скоростью. В этом случае действующая сила равна по модулю силе тяжести и работа равна

$$(56) \quad A_{\text{т}} = mgh > 0.$$

В результате совершения работы изменилось положение тела относительно поверхности Земли.

Далее, вычислим работу, совершаемую силой трения скольжения во время торможения тела до его полной остановки. Если тормозной путь тела равен l , то работа

$$(57) \quad A_{\text{тр}} = -\mu_{\text{т. ск.}} Nl < 0.$$

В результате работы изменилась скорость движения тела.

Мы видим, что работа силы может быть как положительной, так и отрицательной. Если проекция вектора силы \mathbf{F} совпадает по направлению с вектором перемещения $d\mathbf{r}$ (это возможно, когда $\alpha < \frac{\pi}{2}$), то знак работы будет положительным. Значит сила ускоряет тело на пути его движения. Если проекция вектора силы противоположна вектору перемещения ($\alpha > \frac{\pi}{2}$), то знак работы будет отрицательным. Значит сила на всем пути тормозит тело (например, работа сил трения). При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ работа силы равна нулю (например, сила реакции опоры работу не совершает).

Единица работы силы — джоуль (Дж): 1 Дж — работа, совершаемая силой 1 Н при перемещении тела на 1 м, при условии что сила постоянная и ее направление совпадает с направлением перемещения.

Работа переменной силы на участке траектории от точки 1 до точки 2 равна алгебраической сумме работ, совершенной силой на отдельных малых участках пути. Эта сумма сводится к вычислению интеграла

$$(58) \quad A = \sum \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \rightarrow \int F_l dl.$$

Для вычисления этой суммы надо знать как сила зависит от пути вдоль траектории 1 → 2. Для некоторых случаев это проще сделать графически.

Пример. Работа силы, растягивающей пружину от недеформированного положения l_0 до длины l , соответствующей растяжению x_1 , где естественно $x_1 = l - l_0$. Направление растягивающей силы F совпадает с положительным направлением оси OX , см. Рис. 11.

Нарисуем график зависимости модуля силы F от растяжения пружины x , см. Рис. 12. Работа силы при удлинении пружины на бесконечно малую величину dx равна

$$(59) \quad dA = Fdx.$$

При стремлении $dx \rightarrow 0$ эта работа численно становится равной площади трапеции с высотой dx на Рис. 12. Сила, растягивающая пружину, по закону Гука равна

$$(60) \quad F = F_{\text{упр}} = kx_1,$$

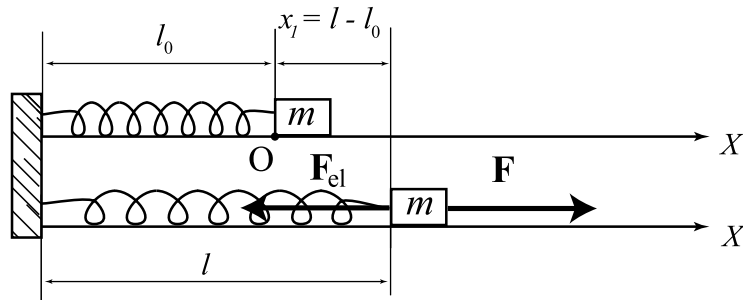


Рис. 11: Иллюстрация к выводу работы, совершаемой при растяжении пружины. Сила упругости обозначена на рисунке как \mathbf{F}_{el} .

где k — жесткость пружины. Искомая работа при растяжении пружины на x_1 равна площади прямоугольного треугольника

$$(61) \quad A = \frac{kx_1^2}{2} \quad \text{и, соответственно,} \quad A_{упр} = -\frac{kx_1^2}{2}.$$

Мы видим, что работа силы упругости, возникающей в пружине при ее растяжении силой F , имеет такое же значение, но с обратным знаком.

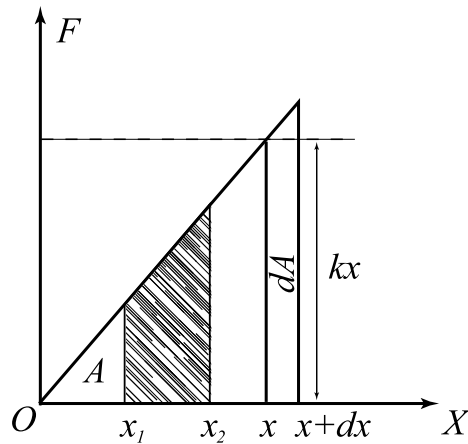


Рис. 12: Иллюстрация к вычислению работы переменной силы.

Мощность силы — это скалярная физическая величина, равная скорости совершения работы в единицу времени

$$(62) \quad N = \frac{dA}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_v v.$$

Единица мощности — ватт (Вт): 1 Вт — мощность, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж.

Внесистемная единица мощности — лошадиная сила, 1 л. с. ≈ 735 Вт.

4.2 Кинетическая и потенциальная энергия

В результате совершения работы механическая энергия может постепенно изменяться. Это изменение можно обнаружить по изменению скорости движения тела, его положения относительно других тел или его деформации.

4.2.1 Теорема о кинетической энергии

Кинетическая энергия — часть механической энергии, которая зависит от массы и скорости тела в данный момент времени

$$(63) \quad E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}.$$

Сформулируем теорему о кинетической энергии

работа сил, действующих на тело, равна изменению его кинетической энергии

и докажем ее на примере равноускоренного движения материальной точки. В этом случае на частицу действует постоянная сила, работу которой можно представить в виде

$$(64) \quad A = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r},$$

где $\Delta \mathbf{r}$ — вектор перемещения частицы.

Согласно второму закону Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, поэтому

$$(65) \quad A = m\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{r}.$$

В случае равноускоренного движения справедлива следующая кинематическая формула

$$(66) \quad 2\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{r} = v_2^2 - v_1^2.$$

Отсюда олучает, что кинетическая энергия тела изменяется в точности на величину, равную работе внешней силы

$$(67) \quad A = \Delta E_{\text{к}}, \quad \text{где} \quad \Delta E_{\text{к}} = E_{\text{к}_2} - E_{\text{к}_1}$$

или

$$(68) \quad A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Из теоремы следует, что кинетическая энергия численно равна работе, которую должна совершить сила, приложенная к покоящемуся телу, чтобы сообщить ему заданную скорость движения (относительно данной инерциальной системы отсчета).

4.2.2 Теорема о потенциальной энергии

Обратите внимание на то, что работа, совершаемая силой тяжести при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории тело двигалось, а зависит только от разности начального и конечного положений над поверхностью Земли

$$(69) \quad A_{\text{т}} = -(mgh_2 - mgh_1).$$

Более того, работа сил упругости при упругой деформации тела также зависит только от величины начальной x_1 и конечной x_2 деформации. Например, работа силы упругости при растяжении пружины равна (геометрически эта работа равна площади заштрихованной трапеции, высота которой равна $x_2 - x_1$, на Рис. 12)

$$(70) \quad A_{\text{упр}} = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right).$$

Такие силы принято называть потенциальными.

Потенциальная сила — это сила, работа которой по перемещению тела из одной точки пространства в другую не зависит от формы траектории тела, соединяющей эти точки, а определяется начальным и конечным положениями тела.

Если работа совершаемая силой, зависит от траектории перемещения из одной точки в другую, то такая сила называется **непотенциальной**. К непотенциальным относят **диссипативные** и **гироскопические силы**. Силы трения скольжения и качения — это диссипативные силы, их работа всегда отрицательная. Сила реакции опоры — это гироскопическая сила, ее работа всегда равна нулю.

Таким образом, **потенциальная энергия** — это энергия взаимодействия тел друг с другом. Она определяется работой, которую должны совершить потенциальные силы, чтобы переместить тело из данного положения в такое, где энергия взаимодействия считается равной нулю. Выбор нулевого положения произволен.

Есть потенциальные силы, которые могут изменяться с течением времени. Например, электрическая сила, действующая на заряд, помещенный в переменное электрическое поле плоского конденсатора. Стационарные потенциальные силы называются **консервативными**. Для них формулируется следующая теорема

Работа консервативных сил равна изменению потенциальной энергии тела, взятому с обратным знаком

$$(71) \quad A_{\text{пот. с}} = -\Delta E_{\text{П}} \quad \Delta E_{\text{П}} = E_{\text{П}2} - E_{\text{П}1}$$

При этом запас потенциальной энергии тела характеризуется функцией $E_{\text{П}}$. Например, потенциальная энергия тела массы m поднятого над высоту h над поверхностью Земли, равна

$$(72) \quad E_{\text{Пг}} = mgh,$$

где высота отсчитывается от нулевого уровня, для которого $E_{\text{П0}} = 0$.

Потенциальная энергия деформированной пружины равна

$$(73) \quad E_{\text{Пупр}} = \frac{kx^2}{2},$$

Если пружина недеформированная, то ее потенциальная энергия равна нулю.

4.3 Закон сохранения механической энергии

Закон сохранения и превращения энергии является фундаментальным и универсальным законом природы, который справедлив как для систем макроскопических тел, так и тел микроскопических.

Полная механическая энергия – это сумма кинетической энергии и потенциальной энергии взаимодействия

$$(74) \quad E = E_{\text{К}} + E_{\text{П}}.$$

Закон сохранения механической энергии гласит, что

при любых процессах, происходящих в физических системах, в которых действуют лишь консервативные силы (наряду с гироскопическими силами), ее полная механическая энергия остается неизменной

$$(75) \quad E = E_{\text{К}} + E_{\text{П}} = \text{const.}$$

Таким образом, в консервативных системах происходит лишь превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно в равных количествах так, что полная механическая энергия остается неизменной.

В случае неконсервативных систем их механическая энергия изменяется, изменение полной механической энергии системы, равно работе, совершаемой непотенциальными силами, действующими на эту систему

$$(76) \quad A_{\text{непот. с}} = \Delta E = E_{\text{К2}} + E_{\text{П2}} - (E_{\text{К1}} + E_{\text{П1}}).$$

Если такими силами являются силы трения, то происходит постепенное уменьшение механической энергии системы за счет процесса **диссипации**, или рассеяния. Однако, энергия системы "не теряется", она лишь только преобразуется в другую форму – тепловую, в результате чего увеличивается внутренняя энергия тел, т. е. увеличивается энергия хаотического движения молекул и соответственно — возрастает температура тела.

В земных условиях неизбежно действуют силы сопротивления и трения. Однако закон сохранения механической энергии можно применять приближенно и в этом случае, но лишь при условии, что работа всех непотенциальных сил пренебрежимо мала по сравнению с запасом полной механической энергии

$$(77) \quad E \gg A_{\text{непот. с.}}$$

Пример: работа и мощность человека [3]. При кратковременных усилиях человек может развивать мощность порядка нескольких киловатт. Если спортсмен массой $m = 70$ кг подпрыгивает с места так, что его центр масс поднимается на $h = 5$ м по отношению к нормальной стойке, а фаза отталкивания длится $\Delta t = 7,6$ с, то он развивает мощность около $W = 3,5$ кВт. Эту величину можно получить с помощью формулы:

$$(78) \quad W = \frac{A}{\Delta t} = \frac{mgh}{\Delta t}.$$

При ходьбе по горизонтальной поверхности человек совершает работу. Работа совершается против силы тяжести при периодическом поднятии центра масс тела, силы трения при ускорение и замедление ног, а также силы сопротивления воздуха. Так человек массой 75 кг при ходьбе со скоростью 5 км/ч развивает мощность около 60 Вт. С возрастанием скорости мощность быстро увеличивается, достигая 2060 Вт при скорости 7 км/ч.

Мышцы человека совершают также статическую работу. Нервное возбуждение, передаваемое мышце по двигательному нерву, возбуждает ее, приводя к сокращению. Если мышца отягощена грузом, то при этом совершается работа против силы тяжести при малом поднятии груза. Процесс возбуждения и сокращения мышцы заканчивается ее расслаблением, когда мышца принимает прежнюю длину. Продолжительность цикла — от 0,03 до 0,06 с. Если в момент сокращения мышцы ее возбудить вторично, то произойдет новое сокращение и новое поднятие груза. Приблизительно при 100 раздражений в секунду мышца человека сокращается практически плавно и дрожание перестает быть заметным, так как амплитуда колебаний чрезвычайно мала. Наступает кажущееся равновесие. Длительное кажущееся равновесие скелетной мышцы называется *тетанусом*. Таким образом, статическая работа мышцы человека — это малые и частые смены сокращения и расслабления мышцы, при которых совершается работа против силы тяжести.

В заключении отметим, что закон сохранения энергии связан со свойством симметрии времени. *Симметрия законов физики по отношению к сдвигу во времени соответствует сохранение полной механической энергии изолированной потенциальной системы.* Это придает закону сохранения энергии универсальность, которая позволяет применять этот закон и в теории относительности и квантовой физике.

4.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. Тело соскальзывает с наклонной плоскости. Какую при этом работу совершает сила реакции опоры \mathbf{N} ?

2. Представьте, что сосуд, наполненный одноатомным газом и движущийся с некоторой скоростью внезапно останавливается. Увеличится ли при этом его температура? Ответ обоснуйте.